Compléments mathématiques

Willie Robert
Physique-chimie – PT
Lycée Voltaire

15 décembre 2023

Table des matières

Chapitre A

Dérivées

I Dérivée d'une fonction

I.1 Définition

On dit que f, fonction réelle, définie dans un intervalle des réels $\mathbb{R}$, est *dérivable*, en un point x_0 de cet intervalle et admet pour dérivée $f'(x_0)$ si :

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} = f'(x_0) \quad \text{notée} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

La fonction f' est appelée *dérivée* de f. Elle peut, elle aussi, admettre une fonction dérivée et ainsi de suite. On note le dérivées successives :

$$f' \qquad f'' \qquad \dots \qquad f^{(n)} \qquad \text{ou encore} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \qquad \dots \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

I.2 Interprétation géométrique

La limite précédente représente également le taux de variation de la fonction au voisinage de x_0, ou encore l'inclinaison de la tangente à la courbe en $M_0(x_0)$.

Remarques :

— très souvent, en Physique, et plus particulièrement en Mécanique, lorsqu'il s'agit d'une dérivée par rapport au temps t, on utilise la notation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{f}(t)$$

— pour les fonctions de variables complexes que nous rencontrerons en Électrocinétique et en Électromagnétisme, les résultats sont facilement généralisables.

Exemple tiré de l'Électrocinétique : soit $\underline{q}(t) = q_0\, e^{j\omega t}$ la charge complexe. On obtient pour le courant complexe $\underline{i}(t)$:

$$\underline{i}(t) = \frac{\mathrm{d}\underline{q}}{\mathrm{d}t} = q_0\, \frac{\mathrm{d}e^{j\omega t}}{\mathrm{d}t} = q_0\, j\omega\, e^{j\omega t} = j\omega \underline{q}(t)$$

II Dérivées partielles

Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle, définie dans $\mathbb{R}^3$. Pour (y_0, z_0) donnés, la fonction $f(x, y_0, z_0)$ est une fonction de la seule variable x ; si elle est dérivable en x_0, sa dérivée s'appelle *dérivée partielle* de f par rapport à x au voisinage du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

De même on peut définir les dérivées partielles par rapport à y et z en M_0, $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, et des dérivées partielles successives.
En Physique il est d'usage de rappeler en indice les variables qui sont fixées lors de la dérivation. Par exemple, dans le cas précédent :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{est noté} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$$

pour rappeler que y et z sont considérés comme fixes lors de la dérivation.

Exemple tiré de la Thermodynamique : soit une mole de gaz parfait, décrit par sa température T, son volume V et sa pression p, on a :

$$pV = RT \quad \text{ou encore} \quad V = \frac{RT}{p}$$

le taux de variation du volume avec la pression pour T donnée est :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = RT\left(\frac{\partial 1/p}{\partial p}\right)_T = -\frac{RT}{p^2}$$

III Dérivée d'une fonction composée

Soient u une une fonction dérivable dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie dans l'intervalle $u(I)$. Si u est dérivable en x_0, alors $F = f \circ u$ est dérivable en x_0 et :

$$F'(x_0) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'[u(x_0)]u'(x_0)$$

Exemple tiré de la Cinématique :

$$\text{Si} \quad x(t) = R\cos[\theta(t)] \quad \text{alors :}$$

$$x'(t) = \dot{x}(t) = -R\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -R\sin(\theta)\dot{\theta}$$

IV Dérivée d'un vecteur par rapport à un paramètre t

IV.1 Définition

On appelle dérivée du vecteur $\overrightarrow{A}$, par rapport au paramètre t, en t_0, le vecteur :

$$\lim_{t\to t_0}\left\{\frac{\overrightarrow{A}(t) - \overrightarrow{A}(t_0)}{t - t_0}\right\} \quad \text{noté} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

Ses composantes dans une base fixe sont les dérivées, par rapport à t, des composantes de $\overrightarrow{A}$ dans cette base :

$$\text{si} \quad \overrightarrow{A} = \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{d}A_x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}A_y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}A_z/\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Exemple tiré de la Cinématique : soit le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, avec O fixe, exprimé dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

on a tout de suite, la vitesse dans la même base :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

IV.2 Dérivée du produit d'un scalaire et d'un vecteur

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\overrightarrow{A}) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{A} + \alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}$$

Exemple tiré de la Cinématique : Soit le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, avec O fixe, exprimé dans la base sphérique :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

on a tout de suite :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$$

IV.3 Dérivée d'un produit scalaire de deux vecteurs

On a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t}$$

Exemple tiré de la Cinématique : dérivons le carré de la norme du vecteur position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$:

$$||\overrightarrow{r}||^2 = r^2 = \overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r} \quad \text{donne} \quad 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{r}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$$

Si en plus cette norme est constante, comme pour les vecteurs unitaires d'une base, $r = \text{Cste}$, alors :

$$\overrightarrow{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{r}\cdot\dot{\overrightarrow{r}} = 0$$

Le vecteur dérivée est alors **normal** au vecteur. Par exemple, pour la base polaire :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \perp \overrightarrow{e_r} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r} \perp \overrightarrow{e_\theta}$$

C'est aussi le cas de la vitesse et de la position dans un mouvement circulaire, ou encore de la vitesse et de l'accélération dans un mouvement uniforme (la norme de la vitesse est constante).

Chapitre B

Différentielles

I Définition et utilisation

Soit une fonction $f(x, y)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ et qui admet des dérivées partielles, on définit **la différentielle** $\mathrm{d}f$ de f comme la variation de f sous l'effet des variations conjointes $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}f = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)$$

Si on limite le calcul au premier ordre en $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ (c'est à dire si on néglige les termes en $\mathrm{d}x^2, \mathrm{d}y^2, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$) on peut confondre les dérivées partielles et les taux d'accroissement d'où :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y &\approx \frac{f(x + \mathrm{d}x, y) - f(x, y)}{\mathrm{d}x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x &\approx \frac{f(x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)}{\mathrm{d}y} \end{aligned}$$

En remarquant que $\mathrm{d}f$ peut se réécrire :

$$\mathrm{d}f = [f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y + \mathrm{d}y)] + [f(x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)]$$

on obtient :

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y+\mathrm{d}y} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

Dans une approximation au premier ordre, on peut confondre les dérivées partielles évaluées en y et en $y + \mathrm{d}y$, et donc on obtient :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y}$$

En Physique, on utilisera essentiellement le résultat précédent énoncé ainsi : la différentielle est, au second ordre près, la variation de la fonction f, entre deux points voisins.

Exemple tiré de la Thermodynamique : soit une mole de gaz parfait, le taux de variation du volume avec la pression pour T donnée est :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = RT \left(\frac{\partial 1/p}{\partial p}\right)_T = -\frac{RT}{p^2}$$

et on obtient la variation de volume ΔV pour une petite variation de pression Δp à température constante par :

$$\Delta V \approx \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \Delta p = -RT\frac{\Delta p}{p^2}$$

II Exemples

Fonction	Différentielle
$f(x) = 3x^2 + 5x + 4$	$\mathrm{d}f = (6x + 5)\mathrm{d}x$
$f(x) = 1/x$	$\mathrm{d}f = -\mathrm{d}x/x^2$
$f(x) = \ln x$	$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x/x$
$f(x) = e^{ax}$	$\mathrm{d}f = a\, e^{ax}\mathrm{d}x$
$f(x) = a\cos(x)$	$\mathrm{d}f = -a\sin(x)\mathrm{d}x$
$f(x) = a\sin(x)$	$\mathrm{d}f = a\cos(x)\mathrm{d}x$
$f(x) = \tan(x)$	$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x/cos^2(x)$
$f(x, y) = x + y$	$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$
$f(x, y) = xy$	$\mathrm{d}f = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$
$f(x, y) = x/y$	$\mathrm{d}f = (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)/y^2$

III Forme différentielle

Nous rencontrerons souvent en Physique, des situations où nous manipulerons une grandeur physique infinitésimale qui ne correspond pas *a priori* à la variation d'une fonction mathématique. Dans ce cas, cette grandeur n'admet pas de différentielle et la grandeur infinitésimale de la grandeur G notée δG est *une forme différentielle.*
Pour une grandeur G qui dépend par exemple des variables x et y, on a pour des variations $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$:

$$\delta G = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

où P et Q ne sont pas a priori des dérivées partielles puisque G n'est pas une fonction.
La conséquence principale est que, contrairement à une différentielle, la valeur de la forme différentielle *dépend du chemin suivi* (c'est à dire de la façon dont on réalise les variations $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$). Il conviendra de ne pas confondre forme différentielle et différentielle, la notation δ différente de d étant là pour le rappeler.
On rencontre cette situation dans le cas du travail élémentaire d'une force non-conservative par exemple.
En ce qui concerne les notations toujours, pour une grandeur finie évaluée entre deux points M_1 et M_2, on note :

$$G = \int_{M_1}^{M_2} \delta G$$

Il ne s'agit alors pas d'une intégrale mais seulement d'une somme de grandeurs infinitésimales. La grandeur finie n'est pas précédée de Δ cette notation Δ étant réservée aux variations finies des fonctions :

$$\Delta f = f(M_2) - f(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} \mathrm{d}f$$

Exemple tiré de la Thermodynamique : travail et transfert thermique dépendent a priori du chemin suivi lors de la transformation et leurs variations sont des formes différentielles, notées δW et δQ.
D'après le Premier Principe, l'énergie interne U est une fonction d'état extensive d'un système fermé. On peut donc noter sa variation infinitésimale $\mathrm{d}U$. Celle-ci ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Ce principe énonce également que la variation de l'énergie interne est la somme du travail et du transfert thermique, on a :

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$

IV Gradient d'une fonction

Soit $f(x,y,z)$ une fonction réelle, définie dans une partie de $\mathbb{R}^3$, et O un point fixe, on appelle *gradient de la fonction* f, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Les propriétés à retenir du gradient sont les suivantes :

— pour une surface définie par $f(u,v,w) = Cste$, un déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le long de cette surface est perpendiculaire au gradient puisque $\mathrm{d}f = 0 = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$,

— $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ est orienté suivant les valeurs croissantes de f.

— la différentielle $\mathrm{d}f$ est extrémale si $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$

— $\displaystyle\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A) = \Delta f$

Exemple tiré de la Mécanique : soit $\overrightarrow{F}$ une force appliquée au point M. Soit O un point fixe. Par définition, le travail de cette force entre deux points A et B est :

$$\underset{A\to B}{W(\overrightarrow{F})} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Si la force est conservative, alors il existe une fonction $E_P(M)$ telle que : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} E_P$ et donc :

$$\underset{A\to B}{W(\overrightarrow{F})} = -\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}} E_P \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

d'où :

$$\underset{A\to B}{W(\overrightarrow{F})} = -\int_A^B \mathrm{d}E_P = -[E_P(B) - E_P(A)] = -\Delta E_P$$

En coordonnées cartésiennes on obtient pour l'expression du gradient de la fonction $f(x,y,z)$, puisque $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Exemple tiré de la Mécanique : soit un point matériel de masse m, plongé à l'altitude z (avec (Oz) orienté vers le haut) dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$. Ce point possède l'énergie potentielle de pesanteur $E_P(z) = mgz + Cste$. En remarquant que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_z} = \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_z}$$

on voit que la force qui dérive de cette énergie (le poids) s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} E_P = -mg\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} z = -mg\,\overrightarrow{e_z}$$

Exemple tiré de la Statique des fluides : le principe fondamental de la statique de fluide s'écrit, dans un référentiel galiléen et pour un fluide soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$:

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho\,\vec{g} = \vec{0}$$

Grâce à l'exemple précédent on sait que $\overrightarrow{\text{grad}} z = \overrightarrow{e_z}$, et donc que :

$$\rho\,\vec{g} = -\rho\,g\,\overrightarrow{\text{grad}} z = -\rho\,\overrightarrow{\text{grad}}(\rho\,z) \quad \text{si g est uniforme.}$$

Si de plus ρ est uniforme (fluides incompressibles et homogènes) :

$$\rho\,\vec{g} = -\rho\,\overrightarrow{\text{grad}}(\rho z) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho\,g\,z)$$

Le principe fondamental de la statique des fluides incompressibles s'écrit donc :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p - \overrightarrow{\text{grad}}(\rho\,g\,z) = \vec{0}$$

ou encore :

$$p + \rho\,g\,z = K = Cste$$

V Théorème de Schwarz

Soit une fonction $f(x, y)$ définie dans $\mathbb{R}^2$ et qui admet des dérivées partielles, on retient le théorème suivant :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}} \quad \text{théorème de Schwarz}$$

qui traduit le fait que le résultat d'une dérivation partielle d'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles par rapport à chacune des variables sont faites.

Chapitre C

Systèmes de coordonnées

Pour préciser correctement l'écriture des lois physiques, notamment en électromagnétisme, il est utile de connaître et de savoir utiliser les expressions des éléments différentiels (ou encore *élémentaires*) géométriques. On notera $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}V$ respectivement les longueur, surface et volume élémentaires.
Suivant la symétrie du problème ou encore l'expression des grandeurs physiques manipulées, on choisit différents systèmes de coordonnées. Les plus utilisées sont les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

I Coordonnées cartésiennes

Le système de coordonnées cartésiennes est le système pour lequel la base est fixe dans le repère d'étude. Si on note $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude et $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base cartésiennes, alors les dérivées temporelles de ces vecteurs unitaires sont nulles dans le référentiel $\mathcal{R}$.
On a de façon triviale :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + y\,\overrightarrow{e_y}$$

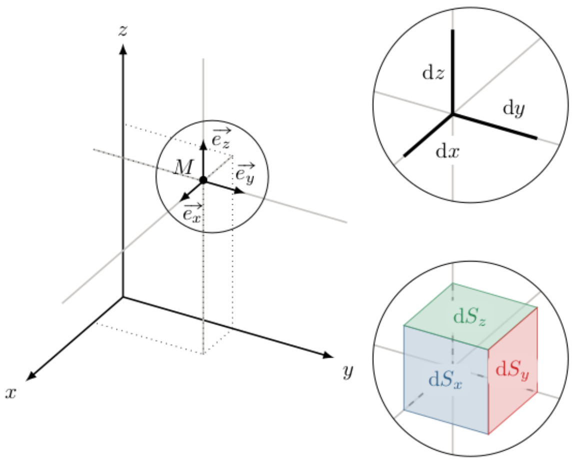
et

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

Étant donné que $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$ on a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}}\mathrm{d}t$$

et on en déduit que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \dot{x}\mathrm{d}t\,\vec{e}_x + \dot{y}\mathrm{d}t\,\vec{e}_y + \dot{z}\mathrm{d}t\,\vec{e}_z$.



En remarquant que $\dot{x}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, etc. on conclut que $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}}$.
On obtient donc les éléments de longueur le long des trois axes suivants :

$$\left|\begin{array}{l}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{array}\right.$$

Les différentes surfaces élémentaires scalaires correspondent aux faces d'un cube :

$$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;\;\; \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z;\;\; \mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

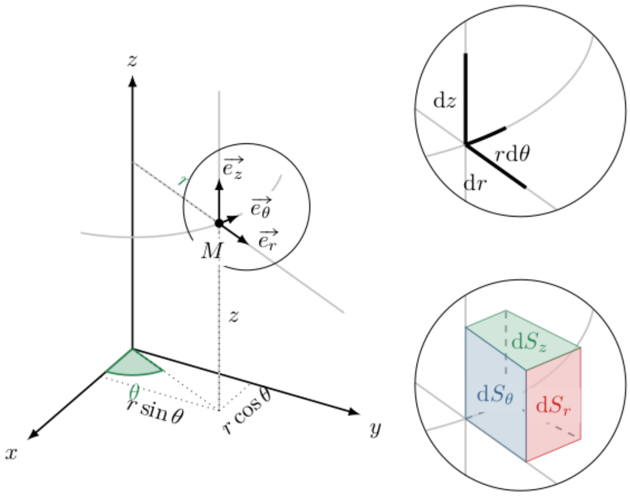
De plus, en Physique, il est courant d'orienter les surfaces à l'aide d'une normale. La surface élémentaire est alors un vecteur. En considérant l'exemple de la face orthogonale à $\overrightarrow{e_z}$ d'un cube élémentaire, on a :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S_z\,\overrightarrow{e_z} = (\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x}) \wedge (\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y}) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_z}$$

Enfin, l'élément de volume s'écrit simplement :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \left(= (\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x}) \wedge (\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y}) \cdot \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}\right)$$

II Coordonnées cylindriques (r, θ, z)



On note que : $\theta \in [0, 2\pi]$.
On rappelle qu'on a $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$ donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$.

II.1 Déplacement élémentaire

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{e_y} \quad \text{d'où :} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_\theta}$$

Or, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$, donc :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}}$$

On retrouve le même résultat en remarquant que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}}\mathrm{d}t$ d'où on déduit que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \dot{r}\mathrm{d}t\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\mathrm{d}t\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\mathrm{d}t\,\vec{e}_z$. On obtient donc les éléments de longueur le long des trois axes suivants :

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{d}r \\ r\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z \end{array}\right.$$

II.2 Éléments de surface

On construit un élément de surface $\mathrm{d}S$ en fixant une des coordonnées et en faisant le produit des longueurs élémentaires dérivant des deux autres coordonnées :

$$\begin{array}{rcl} \text{portion d'anneau à la côte } z \text{ constante} & : & \mathrm{d}z = 0 \to \mathrm{d}S_z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ \text{portion de surface méridienne à } \theta \text{ constant} & : & \mathrm{d}\theta = 0 \to \mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ \text{portion de surface latérale à } r \text{ constant} & : & \mathrm{d}r = 0 \to \mathrm{d}S_r = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \end{array}$$

II.3 Élément de volume

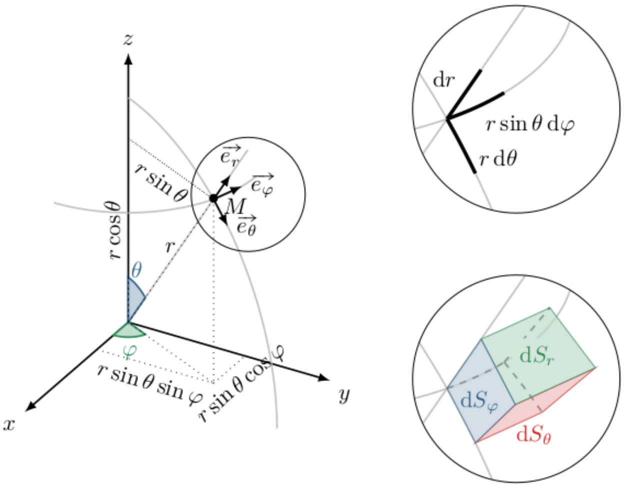
On construit un élément de volume $\mathrm{d}V$ en faisant le produit des trois longueurs élémentaires :

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

II.4 Expression du gradient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_z}$$

III Coordonnées sphériques (r, θ, φ)



On note que : $\theta \in [0,\ \pi]$ et $\varphi \in [0,\ 2\pi]$.
On rappelle qu'on a $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$, donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\vec{e_r}$.

III.1 Déplacement élémentaire

Le vecteur unitaire $\vec{e_r}$ s'écrit :

$$\vec{e_r} = \sin(\theta)\ \cos(\varphi)\,\vec{e_x} + \sin(\theta)\ \sin(\varphi)\,\vec{e_y} + \cos(\theta)\,\vec{e_z}$$

On a donc :

$$\vec{e_r} = \vec{e_r}(\theta,\ \varphi) \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}\vec{e_r} = \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}\right)_\varphi \mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi}\right)_\theta \mathrm{d}\varphi$$

On peut facilement montrer que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}\right)_\varphi &= \vec{e_\theta} \\ \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi}\right)_\theta &= \sin(\theta)\,\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\vec{e_r}$, donc :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} + r\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_\varphi}}$$

Les éléments de longueur suivant les trois axes sont donc :

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{d}r \\ r\,\mathrm{d}\theta \\ r\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi \end{array}\right.$$

III.2 Éléments de surface

On construit un élément de surface $\mathrm{d}S$ en fixant une des coordonnées et en faisant le produit des longueurs élémentaires dérivant des deux autres coordonnées :

$$\begin{array}{rcl} \text{portion de calotte sphérique } r \text{ constant} & : & \mathrm{d}r = 0 \rightarrow \mathrm{d}S = r^2\ \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ \text{portion de plan parallèle à } \theta \text{ constant} & : & \mathrm{d}\theta = 0 \rightarrow \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\ \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi \\ \text{portion de plan méridien à } \varphi \text{ constant} & : & \mathrm{d}\varphi = 0 \rightarrow \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{array}$$

III.3 Élément de volume

On construit un élément de volume dV en faisant le produit des trois longueurs élémentaires :

$$\mathrm{d}V = r^2\, \mathrm{d}r\, \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$$

III.4 Expression du gradient

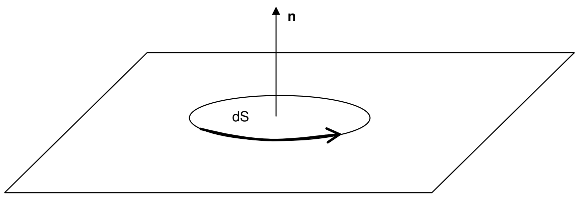
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \overrightarrow{e_\varphi}$$

IV Flux et circulation d'un champ de vecteur

V Flux d'un champ de vecteur

V.1 Orientation d'une surface

Il est souvent nécessaire de disposer d'une convention d'orientation d'une surface, qui repose sur la définition d'une normale $\vec{n}$ à cette surface.
Dans le cas d'une surface ouverte, il est convenu de tracer une courbe fermée orientée sur cette surface, la normale étant alors déterminée par la règle du tire-bouchon.



Dans le cas d'une surface fermée, la normale est simplement définie comme orientée *vers l'extérieur* de la surface.

V.2 Flux d'un vecteur

Considérons une surface *quelconque* S orientée et un champ de vecteur $\overrightarrow{A}$. Par définition on appelle *flux* Φ de $\overrightarrow{A}$ à travers S, l'intégrale suivante :

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{A} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$$

C'est a priori une forme différentielle de degré 2 :

$$\delta\Phi = P\mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

VI Circulation d'un champ de vecteur

La circulation d'un champ de vecteur $\overrightarrow{A}$, le long d'un contour fermé Γ est l'intégrale suivante :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

où M appartient au contour fermé et O est un point fixe.

Chapitre D

Équations différentielles

I Équation différentielle linéaire à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire est une équation du type :

$$a_n\, y^{(n)} + a_{(n-1)}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = f(x) \tag{D.1}$$

c'est-à-dire une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées successives. $f(x)$ est appelé « second membre » de l'équation.
Lorsque les coefficients a_i sont des constantes, on dit qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. C'est le cas que nous rencontrerons principalement en sciences physiques.
L'équation suivante :

$$a_n\, y^{(n)} + a_{(n-1)}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{D.2}$$

est l'**équation homogène** associée à (D.1). Elle est aussi appelée équation différentielle sans second membre ou plus simplement **équation sans second membre** (ou encore à second membre nul).
Remarque : si dans l'équation, il apparaît des fonctions non linéaires de y (ex : y^2, $\sin y$, $\ln y^3$,…), alors l'équation différentielle n'est plus linéaire.

II Solution générale d'une équation différentielle linéaire

L'équation étant **linéaire** une solution générale est une **superposition** d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène (dite « sans second membre »).
Solution générale = Solution de l'équation sans second membre + Solution particulière

$$y = y_{SP} + y_{SSM}$$

Il existe une infinité de solutions mathématiques à (D.1) ; la résolution donne donc une solution générale de y où apparaissent des constantes inconnues. L'équation (D.1) est vérifiée quelle que soit la valeur donnée à ces constantes.
Si l'équation est temporelle (la variable est le temps) la solution de l'équation sans second membre sera appelée : « **régime transitoire** » et la solution particulière : « **régime forcé** » (ce sera le cas en électrocinétique notamment).
La solution particulière de (D.1) est une fonction y_0 qui vérifie (D.1) et que nous devrons trouver intuitivement.
Nous devons donc essentiellement apprendre à résoudre l'équation sans second membre.
Remarques : en physique, nous serons le plus souvent confrontés à des équations différentielles linéaires :

du premier ordre : $a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$

du second ordre : $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$

Lorsque les équations différentielles ne sont pas linéaires, la méthode de la superposition des solutions ne fonctionne plus et il faut envisager soit une résolution de l'équation par intégration (généralement après séparation des variables) soit une résolution purement numérique (méthode d'Euler par exemple).

III Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre

IV Équation

Si la fonction y est fonction de t, c'est une équation du type :

$$\boxed{y' + a\,y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = f(t)}$$

où a est une constante (équation à coefficient constant).

V Solution de l'équation sans second membre

La solution de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 0$ est $y_{SSM}(t) = Ae^{-at}$ (où A est une constante quelconque).
Exercice : vérifier que $y_{SSM}(t) = Ae^{-at}$ est bien solution de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 0$ quelle que soit la valeur de A.

VI Solution particulière de l'équation complète

On cherchera a priori une solution particulière ayant la même « forme » que le second membre c'est-à-dire une dépendance analogue à la variable (le temps ou la position suivant les situations physiques).
Exemples :

« Forme » de f	Solution particulière
$f = A = Cste$	$y_{SP} = K = Cste$
$f(t) = A\,t + B$ ou $f(t) = A\,t$	$y_{SP}(t) = Kt + Q$
$f(t) = A\,\sin(\omega t)$ ou $f(t) = A\,\cos(\omega t)$	$y_{SP}(t) = K\,\sin(\omega t + \phi)$ ou $K\,\cos(\omega t + \phi)$

Par exemple, supposons que nous ayons à résoudre : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2\,y = 5$ Dans ce cas $f = 5$ est une constante (cas que nous rencontrerons souvent). On cherche donc une solution particulière constante. On a donc dans ce cas : $\dfrac{\mathrm{d}y_{SP}}{\mathrm{d}t} = 0$ ce qui mène immédiatement à $2\,y_{SP} = 5$.
$y_{SP} = \dfrac{5}{2}$ est une solution particulière de l'équation.
Ainsi les solutions générales de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2\,y = 5$ sont de la forme :

$$\boxed{y = y_{SSM} + y_{SP} = A\,e^{-2t} + \frac{5}{2}}$$

VII Détermination de la solution physique du problème (Problème de Cauchy)

Nous avons obtenu une solution générale. Il reste ensuite à déterminer la valeur de la constante A qui reste pour nous une inconnue.
Ce sont les conditions particulières du problème physique qui vont nous donner la valeur de A.
Si la condition porte sur la valeur de la fonction à un instant donné, on parle de conditions initiales.
Si la condition porte sur la valeur de la fonction en une position donnée, on parle de conditions aux limites.
Exemple : on associe à l'équation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2\,y = 5$ la condition initiale $y(t_1) = 3$.
Compte tenu de la forme de la solution générale $y(t) = A\,e^{-2t} + \dfrac{5}{2}$ nous avons :

$$y(t_1) = A\,e^{-2t_1} + \frac{5}{2} \iff 3 = A\,e^{-2t_1} + \frac{5}{2}$$

et donc

$$A = (3 - \frac{5}{2})\,e^{2t_1} = \frac{1}{2}\,e^{2t_1}$$

La solution générale de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2\,y = 5$ avec la condition initiale $y(t_1) = 3$ est :

$$y(t) = \frac{1}{2}\,e^{2t_1}\,e^{-2t} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\,e^{-2(t-t_1)} + \frac{5}{2}$$

Une fois le calcul mené à bien, on vérifie que le résultat est cohérent avec la condition particulière énoncée c'est-à-dire que la solution trouvée redonne bien $y(t_1) = 3$
Ici $y(t = t_1) = \dfrac{1}{2}e^{2t_1}e^{-2t_1} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 3$ et le résultat est donc cohérent.
Remarque : dans la plupart des applications physiques la condition particulière porte sur l'instant $t = 0$ ou sur la position $x = 0$ et le calcul est donc un peu plus simple que dans l'exemple précédent.

VIII Exercice

La tension électrique u vérifie l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3\,u = -4\,t$ associée à la condition initiale :
$u(t=0) = 2\,\mathrm{V}$
Déterminer l'expression de $u(t)$.

IX Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre

X Équation

L'équation est du type :

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$$

Ou encore, si y est une fonction du temps t :

$$\boxed{a\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + b\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c\,y = f(t)}$$

où a, b et c sont des constantes (équation à coefficients constants).

XI Solution de l'équation sans second membre

Dans un premier temps, on associe à l'équation sans second membre un polynôme caractéristique dont on cherche les racines, ce qui revient à résoudre l'équation caractéristique :

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \text{ de discriminant } \Delta = b^2 - 4\,a\,c \tag{D.3}$$

Lorsqu'il y a deux racines r_1 et r_2, la solution est toujours du type :

$$y_{SSM}(t) = A_1\,e^{r_1 t} + A_2\,e^{r_2 t}$$

On peut néanmoins distinguer les cas suivants :

a) $\Delta > 0$
Alors (D.3) possède **2 racines réelles** r_1 et r_2 et la solution de l'équation peut aussi se réécrire :

$$\boxed{y_{SSM}(t) = D\,\mathrm{ch}(r_1 t) + F\,\mathrm{sh}(r_2 t)}$$

Remarque : dans les problèmes physiques que nous étudierons, les racines r_1 et r_2 seront très souvent négatives.

b) $\Delta < 0$
Alors (D.3) possède **2 racines complexes conjuguées** r_1 et r_2 que l'on peut toujours mettre sous la forme :

$$r_1 = -\frac{1}{\tau} + j\,\omega \text{ et } r_2 = -\frac{1}{\tau} - j\,\omega$$

ou encore

$$r_1 = \alpha + j\,\omega \text{ et } r_2 = \alpha - j\,\omega \text{ avec } \alpha = -\frac{1}{\tau}$$

et la solution de l'équation sans second membre s'écrira indifféremment :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y_{SSM}(t) & = & e^{-\frac{t}{\tau}}\,(A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)) \text{ ou} \\ y_{SSM}(t) & = & G\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega\,t + \varphi) \end{array}}$$

Remarque : en physique, la partie réelle des racines sera très souvent négative (c'est-à-dire $\tau > 0$ ou $\alpha < 0$).

c) **cas particulier** $\Delta = 0$
Alors (D.3) possède une racine double et la solution de l'équation sans second membre sera :

$$\boxed{y_{SSM}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\,(A\,t + B)}$$

Remarque : en physique, la partie réelle des racines sera très souvent négative (c'est-à-dire $\tau > 0$).

XII Solution générale de l'équation

$$a\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+c\,y=f(t)$$

Dans un second temps, il faut trouver de façon intuitive la solution particulière de l'équation complète (c'est-à-dire avec son second membre), selon les mêmes principes que pour une équation du premier degré.
On a alors simplement :

Solution générale = solution de l'équation sans second membre + solution particulière

Mais nous remarquons ici que la solution générale d'une équation du second degré est toujours définie à deux constantes près (par exemple A et B, ou G et φ) quel que soit le signe de Δ. Ce sont les **conditions particulières** du problème physique, **appliquées à la solution générale**, qui vont nous donner les expressions de A et de B. Il nous faut donc ici connaître non plus une mais **deux conditions particulières** pour déterminer complètement la solution de l'équation différentielle.

XIII Application

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3\,y=6$$

sachant que

$$y(t=0)=0$$

et

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0)}=1$$

XIV Régime harmonique

Un cas particulier important en Physique intervient lorsque le terme du premier ordre $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ n'apparaît pas dans l'équation et que c est positif :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + c\,y = f(t) \quad \text{avec } c > 0}$$

L'équation est dite harmonique, et la solution de l'équation homogène associée est appelée **régime harmonique**.
Dans ce cas, l'équation caractéristique correspondant à l'équation homogène est : $r^2 + c = 0$ et on trouve immédiatement les racines $r_1 = j\,\sqrt{c}$ et $r_2 = -j\,\sqrt{c}$ pour lesquelles $\alpha = 0$ (ou $\tau \to +\infty$) et $\omega = \sqrt{c}$.
On a immédiatement :

$$y_{SSM}(t) = A\,\cos(\sqrt{c}\,t) + B\,\sin(\sqrt{c}\,t) = G\,\cos(\sqrt{c}\,t + \varphi)$$

La solution générale s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t) &= A\,\cos(\sqrt{c}\,t) + B\,\sin(\sqrt{c}\,t) + y_{SP} \text{ ou} \\ y(t) &= G\,\cos(\sqrt{c}\,t + \varphi) + y_{SP} \end{aligned}$$

Exemple : $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\,y = 6$

Chapitre E

Analyse vectorielle

I Opérateur divergence

I.1 Théorème d'Ostrogradski

Soient (S) une surface fermée délimitant un volume (V) et $\overrightarrow{A}$ un champ de vecteurs quelconque. Soit $\mathrm{d}\tau(P)$ un élément du volume (V) centré autour du point (P). Théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_{P\in(V)} \mathrm{div}(\overrightarrow{A})\mathrm{d}\tau(P) = \oiint_{P\in(S)} \overrightarrow{A}(P)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}(P)$$

I.2 Opérateur divergence en coordonnées cartésiennes

Le théorème précédent suffit à définir l'opérateur divergence, noté div, qui s'applique à un champ de vecteurs et dont le résultat est un scalaire.
En coordonnées cartésiennes x, y, z dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on note A_x, A_y, A_z les coordonnées de $\overrightarrow{A}$ telles que $A_x = \overrightarrow{A}\cdot\vec{u}_x$, $A_y = \overrightarrow{A}\cdot\vec{u}_y$, $A_z = \overrightarrow{A}\cdot\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{A} = A_x\,\vec{u}_x + A_y\,\vec{u}_y + A_z\,\vec{u}_z$. On peut alors exprimer :

$$\boxed{\mathrm{div}(\overrightarrow{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$\mathrm{div}(\overrightarrow{A})$ est mathématiquement un champ scalaire dont la dimension physique est celle de $\overrightarrow{A}$ divisée par une longueur :

$$\mathrm{dim}(\mathrm{div}(\overrightarrow{A}) \equiv \frac{\mathrm{dim}(\overrightarrow{A}))}{\mathsf{L}}$$

II Opérateur rotationnel

II.1 Théorème de Stokes

Soient (C) un contour fermé et orienté, enlaçant une surface (S). La règle de la main droite appliquée au contour (C) permet d'orienter (S) par un vecteur unitaire $\vec{n}$ et de définir $\overrightarrow{S} = S\,\vec{n}$. Soit $\overrightarrow{A}$ un champ de vecteurs quelconque. Théorème de Stokes :

$$\iint_{P\in(V)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A})\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}(P) = \oint_{P\in(C)} \overrightarrow{A}(P)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OP}$$

II.2 Opérateur rotationnel en coordonnées cartésiennes

Le théorème précédent suffit à définir l'opérateur rotationnel, noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$, qui s'applique à un champ de vecteurs et dont le résultat est un vecteur.
En coordonnées cartésiennes x, y, z dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on note A_x, A_y, A_z les coordonnées de $\overrightarrow{A}$ telles que $A_x = \overrightarrow{A}\cdot\vec{u}_x$, $A_y = \overrightarrow{A}\cdot\vec{u}_y$, $A_z = \overrightarrow{A}\cdot\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{A} = A_x\,\vec{u}_x + A_y\,\vec{u}_y + A_z\,\vec{u}_z$. On peut alors exprimer :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z}$$

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A})$ est mathématiquement un champ de vecteurs dont la dimension physique est celle de $\overrightarrow{A}$ divisée par une longueur :

$$\dim(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A}) \equiv \frac{\dim(\overrightarrow{A}))}{\mathsf{L}}$$

III Opérateur laplacien d'un champ scalaire

III.1 Définition

Soit A un champ scalaire quelconque. On appelle opérateur laplacien, noté Δ, l'opérateur tel que :

$$\Delta A = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} A)$$

Attention : ne pas confondre l'opérateur laplacien avec la différence d'une grandeur qui se note de la même façon (par exemple en mécanique ou en thermodynamique). C'est le contexte qui permet de comprendre à quoi se rapporte la notation Δ.

III.2 Opérateur laplacien d'un champ scalaire en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes x, y, z, on peut exprimer :

$$\boxed{\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}}$$

$\Delta(A)$ est mathématiquement un scalaire dont la dimension physique est celle de A divisée par une longueur au carré :

$$\dim(\Delta(A)) \equiv \frac{\dim(A)}{\mathsf{L}^2}$$

IV Opérateur laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnée cartésiennes

IV.1 Expression en coordonnées cartésiennes

Soit $\overrightarrow{A}$ un champ de vecteurs quelconque. En coordonnées cartésiennes x, y, z dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on note A_x, A_y, A_z les coordonnées de $\overrightarrow{A}$ telles que $A_x = \overrightarrow{A} \cdot \vec{u}_x$, $A_y = \overrightarrow{A} \cdot \vec{u}_y$, $A_z = \overrightarrow{A} \cdot \vec{u}_z$ et $\overrightarrow{A} = A_x\,\vec{u}_x + A_y\,\vec{u}_y + A_z\,\vec{u}_z$.

$$\Delta\overrightarrow{A} = \Delta A_x\,\vec{e}_x + \Delta A_y\,\vec{e}_y + \Delta A_z\,\vec{e}_z$$

$\Delta\overrightarrow{A}$ est mathématiquement un champ de vecteurs dont la dimension physique est celle de $\overrightarrow{A}$ divisée par une longueur au carré :

$$\dim \Delta(\overrightarrow{A}) \equiv \frac{\dim(\overrightarrow{A})}{\mathsf{L}^2}$$

IV.2 Relations avec les autres opérateurs d'analyse vectorielle

On retient que :

$$\Delta\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{A})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}) \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{A})) - \Delta\overrightarrow{A}}$$