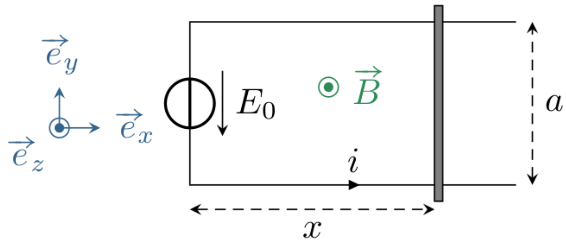
TD 2 – Induction et forces de Laplace

Exercices de base

I Rails de Laplace utilisés comme un moteur

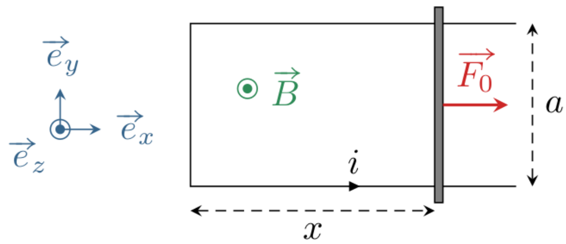
On considère un système de rails de Laplace horizontaux, parallèles, séparés d'une distance a et soumis à un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B\vec{e}_z$ uniforme et stationnaire. L'ensemble possède une résistance électrique r. Ce système est utilisé en fonctionnement moteur : un générateur impose une tension E_0 stationnaire, ce qui met en mouvement de translation la tige de masse m initialement immobile. Il réalise donc une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.



1. Exprimer la force de Laplace subie par la tige mobile. En déduire l'équation mécanique régissant le mouvement de la tige.
2. Déterminer la force électromotrice induite par le mouvement de la barre. En déduire l'équation électrique.
3. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_x de la tige.
4. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i.
5. Comparer la puissance mécanique fournie par la force de Laplace et la puissance électrique fournie par le générateur induit. Interpréter physiquement leur signe respectif.
6. Procéder au bilan de puissance et l'interpréter.

II Rails de Laplace utilisés comme un générateur

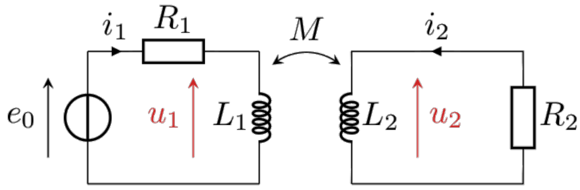
Considérons les mêmes rails de Laplace que dans l'exercice précédent. Le système est maintenant utilisé en fonctionnement générateur : il n'y a plus de générateur E_0, mais un opérateur extérieur tracte la tige (initialement immobile) avec une force constante $\overrightarrow{F}_0$, ce qui génère un courant induit dans le système. Il réalise donc une conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.



1. Déterminer *sans calcul* le signe du courant induit.
2. Exprimer la force de Laplace subie par la tige mobile. En déduire l'équation mécanique.
3. Déterminer la force électromotrice induite. En déduire l'équation électrique.
4. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par le courant i dans le système.
5. Comparer la puissance mécanique fournie par la force de Laplace et la puissance électrique fournie par le générateur induit.
6. Procéder au bilan de puissance et l'interpréter.

III Couplage inductif

Considérons le montage ci-contre, dans lequel deux circuits RL sont couplés par inductance mutuelle.

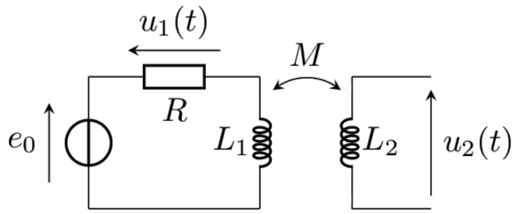


1. Rappeler la définition des coefficients L_1 , L_2 et M et leur origine physique.
2. Exprimer les tensions u_1 et u_2 en fonction des intensités i_1 et i_2 . En déduire le système d'équations différentielles couplées vérifié par les courants i_1 et i_2.
3. On se place en régime harmonique. Établir l'expression de l'impédance complexe apparente de la bobine L_1 en présence du circuit 2, c'est-à-dire la grandeur L_{app} permettant d'écrire $\underline{u}_1 = jL_{\text{app}}\omega\underline{i}_1$.
4. Établir le bilan de puissance du circuit en régime quelconque et interpréter chacun des termes.

Exercices avancés

IV Mesure d'une inductance mutuelle

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure.



La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\,\Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2{,}0\,\text{kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.

1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici ?
2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1.
3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3{,}00\,\text{V}$ et $U_2 = 0{,}50\,\text{V}$.
4. On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

V Induction dans une bobine carrée

Une ligne à haute tension, modélisée par un fil rectiligne infini, transporte un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $I = 1{,}0\,\text{kA}$. On positionne une bobine plate carrée de N spires de côté $a = 30\,\text{cm}$ à une distance $d = 2{,}0\,\text{cm}$ du fil. Cette bobine est connectée à une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V. L'impédance de la bobine est considérée négligeable devant celle de l'ampoule. Voir figure 1.

Déterminer le nombre de spires nécessaires pour que l'ampoule s'allume.

On rappelle que le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini est donné par :

$$\forall (M,t), \quad \vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0\, i(t)}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

où i est l'intensité du courant qui parcourt le fil, et r et θ les coordonnées cylindro-polaires du point M en prenant le fil rectiligne comme axe (Oz) et $\vec{e}_z$ orienté dans le sens du courant.

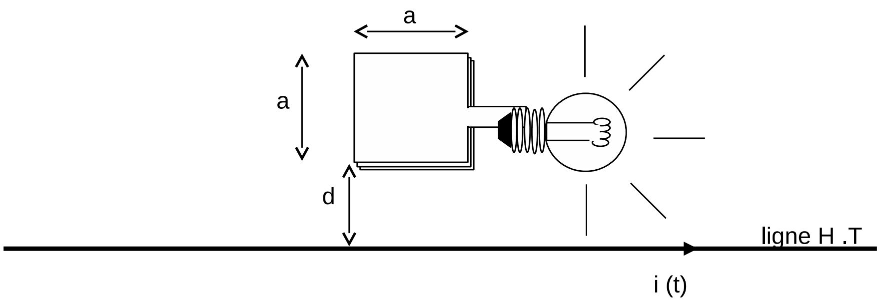
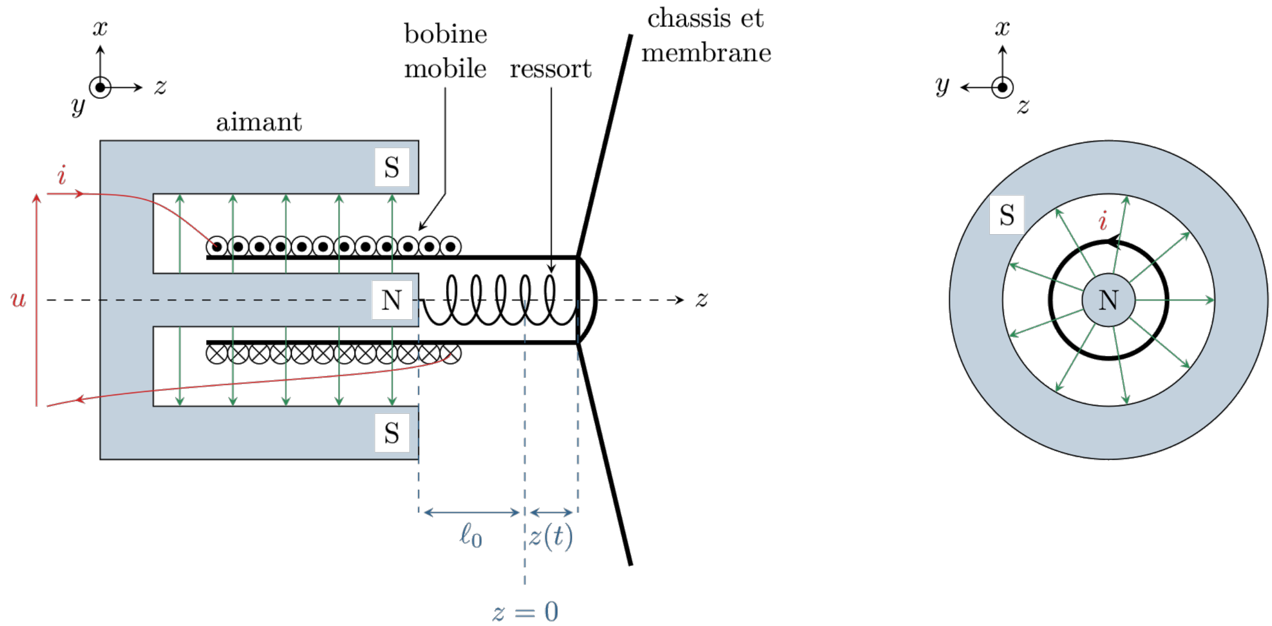


FIGURE 1 – Ligne haute tension au voisinage d'une ampoule connectée à une bobine plate carrée. La bobine et le fil appartiennent au même plan.

VI Haut-parleur



Un haut-parleur est composé d'un aimant permanent fixe, dont la géométrie permet de produire un champ magnétique radial de norme constante, $\overrightarrow{B} = B\vec{e}_r$, représenté par les flèches vertes en traits fins sur la figure ci-dessus.
Une membrane est reliée mécaniquement à cet aimant par une suspension appelée le « spider », modélisée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Un châssis mobile cylindrique portant un bobinage de résistance R et de longueur totale ℓ_{bob} (ℓ_{bob} tient compte à la fois du rayon du bobinage et du nombre de spires bobinées) peut se déplacer dans l'entrefer de l'aimant.
L'ensemble formé par la bobine, le châssis et la membrane est appelé « équipage mobile » du haut-parleur. Un générateur extérieur impose une tension de commande u, et donc un courant i circule dans la bobine. La membrane est alors mise en mouvement sous l'effet des forces de Laplace, et crée une onde de pression : le son.

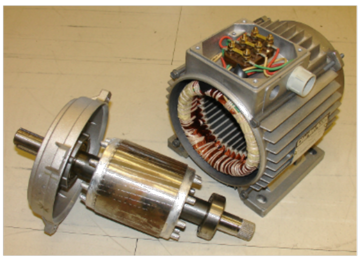
1. Montrer que la force de Laplace subie par un tronçon de spire bobinée de longueur infinitésimale $d\ell$ s'écrit $d\overrightarrow{F}_L = -iBd\ell\vec{e}_z$. En déduire la force de Laplace totale en fonction de ℓ_{bob}.
2. Établir l'équation mécanique du système. On prendra en compte une force de frottements linéaire $\overrightarrow{F} = -\alpha\vec{v}$: que modélise-t-elle ?
3. En exploitant la conservation de la puissance lors de la conversion électro-mécanique, établir l'expression de la fém induite par le champ extérieur.
4. En déduire l'équation électrique du système.
5. Exprimer l'impédance d'entrée du haut-parleur $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$. Montrer qu'elle s'interprète comme la mise en série d'une impédance électrique et d'une impédance mécanique à définir.

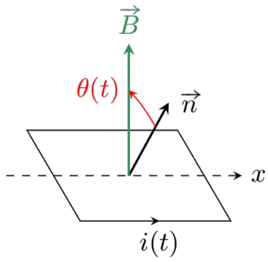
VII Moteur synchrone

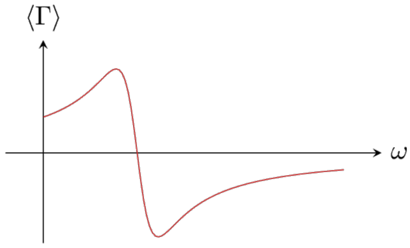
Considérons un modèle simple de moteur synchrone. Le rotor, de moment magnétique $\overrightarrow{m}$, vitesse angulaire ω constante que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ qui l'entraîne.
On s'intéresse à l'angle interne du moteur θ orienté de $\vec{m}$ vers $\overrightarrow{B}$ et au couple $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ exercé par le champ sur le moment magnétique. On prendra $B = \|\overrightarrow{B}\| 0{,}2\,\mathrm{T}$, $m = \|vecm\| 8\,\mathrm{A\,m^2}$ et une fréquence de rotation de 50 tours par seconde.

1. Proposer un dispositif simple permettant de réaliser le champ magnétique tournant.
2. Que vaut θ si le moteur fonctionne à vide ?
3. Le moteur doit entraîner une charge mécanique qui exerce un couple résistant $\mathcal{C}_r = 0{,}65\,\mathrm{N\,m}$. Calculer l'angle interne et la puissance mécanique fournie par le moteur. D'où provient cette puissance ?
4. La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

VIII Moteur asynchrone







Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance R, d'inductance L et de surface S tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe (Ox). La normale $\vec{n}$ à la spire est contenue dans le plan (Oyz). Cette spire est plongée dans un champ $\overrightarrow{B}$ généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz), de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante ω' autour de (Ox).
Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.

1. Expliquer qualitativement (sans équation) pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses ω et ω' peuvent-elles être identiques ?
2. Pour simplifier, on suppose qu'à l'instant initial $\vec{n}$ et $\overrightarrow{B}$ sont colinéaires et de même sens selon $\vec{e}_z$. Exprimer l'angle θ en fonction de $\Omega = \omega' - \omega$. Que représente physiquement la vitesse de glissement Ω ?
3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor en fonction de Ω.
4. On se place en régime permanent. Déterminer la pulsation du courant dans la bobine et résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment à l'aide de la représentation complexe. Écrire la solution comme une somme de sinus et cosinus.
5. En considérant le moment magnétique $\overrightarrow{m}$ de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple moyen $\langle\Gamma\rangle$ s'exerçant sur la bobine.
6. L'allure de la courbe représentant $\langle\Gamma\rangle$ en fonction deωest donnée ci-dessus. Le moteur peut-il démarrer seul ?
7. Le moteur doit entraîner une charge mécanique exerçant un couple résistant Γ_r connu. Justifier graphiquement qu'un ou deux points de fonctionnement, c'est-à-dire une ou deux vitesses de rotationω, sont possibles. En raisonnant en termes de stabilité par rapport à Γ_r, justifier qu'un de ces deux points de fonctionnement n'est pas utilisable en pratique. Lequel et pourquoi ?